XIX Российский Фестиваль юных математиков

Второй тур. Лига стратегий. Решения.

1. Сначала покрасим требуемым образом прямую. Выберем различные простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$. Пусть A_i $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ есть множество положительных вещественных чисел вида m/p_i^n, где m не кратно p_i, а n натуральное. A_k определим как $\mathbb{R} \setminus \cup_{i=1}^{k-1} A_i$. Покрасим теперь в j-ый цвет точки пространства, удаленные от данной точки O на расстояние, принадлежащее множеству A_j.

2. *1 решение.* Сделаем инверсию с центром в точке N и радиусом $CN = ND$. При этом точки A и P поменяются местами, а также точки B и Q поменяются местами. Поэтому прямая CP перейдет в окружность CAN, прямая DQ — в окружность DBN. Каждая из этих окружностей симметрична относительно линии центров исходных окружностей (общего серединного перпендикуляра к отрезкам AC и BD), поэтому их вторая точка пересечения — это точка M. Следовательно, точка пересечения прямых CP и DQ лежит на прямой MN.

2 решение. Достаточно доказать, что точки C, P, Q, D лежат на одной окружности (тогда три указанные прямые будут пересекаться в радикальном центре этой окружности и окружностей S_1 и S_2). Для этого докажем, что сумма углов $\angle CPQ$ и $\angle QDC$ равна $180°$. Эта сумма складывается из углов $\angle NPQ$, $\angle NDQ$ и $\angle CPN$

Точка N лежит на радикальной оси S_1 и S_2, поэтому $NP \cdot NA = NQ \cdot NB$. Значит, четырехугольник $APQB$ вписанный, т.е. $\angle NPQ = \angle ABQ$ и равен половине дуги BQ. Далее, $\angle NDQ$ равен половине дуги DQ. Сумма этих двух углов равна половине дуги BD, т.е. половине дуги AC (эти дуги гомотетичны). Наконец, $\angle CPN$ равен половине дуги APC. Итак, сумма всех трех углов равна $360°/2 = 180°$.

3. Ответ: не всегда. Инвариантом является четность суммы в таком множестве: разобьем прямоугольник на 10 квадратов 10×10, пронумеруем квадраты естественным образом и в квадратах с нечетными номерами отметим клетки главных диагоналей (из левого верхнего угла в правый нижний), в квадратах с четными номерами клетки побочных диагоналей (из левого нижнего угла в правый верхний).

4. Ответ: n. Полагая $x_1 = n-1$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ получаем произведение, равное n. Давайте докажем, что произведение из условия всегда кратно n. Пусть p — простое число, делящее n, причем n делится на p^k. Выберем i так, что x_i не кратно p (все x_i не могут быть кратны p, так как их сумма равна $n-1$). Заменим в нашем произведении $C_n^{x_i}$ на равное выражение $\frac{n}{x_i} C_{n-1}^{x_i-1}$. Знаменатель не делится на p, так что в числителе останется p^k, что и требовалось.

5. Обозначим одну долю A, другую B. Каждому из участвующих чисел сопоставим букву A или B случайным образом (буквы A и B равновероятны, буквы разных чисел независимы.) Предположим, что оказалось, что среди чисел каждой вершины доли A есть хотя бы одно, которому сопоставлена буква A, аналогично для B. Тогда оставим в вершинах именно такие числа и тем построим требуемую расчисловку. Докажем, что вероятность указанного желанного события больше 0. В самом деле, для каждой вершины вероятность того, что всем ее числам сопоставлена не та буква, равна 2^{-n}, а всего вершин меньше, чем 2^n.

6. Докажем, что точка X изогонально сопряжена центру Y описанной окружности треугольника CPQ относительно ABC. Утверждение сразу последует. Для доказательства рассмотрим точки U на AM и V на AC такие, что $\angle AEU = \angle AEV = \angle ACB$, так что треугольник AEV подобен ACB и AU — биссектриса треугольника EAV. Подсчетом углов несложно убедиться, что точки B, E, U, M лежат на одной окружности. Заметим также, что $AB : BE = AB : BC = AV : EV$, так что центр S окружности $BMUE$ соответствует центру Y окружности CPQ в подобных треугольниках AEV и ACB. Поскольку эти треугольники обратно ориентированы и имеют общий угол A, получаем, что AS и AY симметричны относительно бисектрисы угла $\angle CAB$. Аналогично, BY и BS_1 симметричны относительно биссектрисы треугольника $\angle CBA$, где S_1 — центр описанной окружности треугольника DAN. Значит, X и Y действительно изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.

7. Имеем $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 \geqslant 2\sqrt{(x_1-x_2)^2 \cdot 4x_1x_2}$ по неравенству о средних, так что $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{xy}} \geqslant 2\sqrt{2} \cdot |x-y|$. Применяя эту оценку к каждому слагаемому в правой части, а затем неравенство треугольника, получаем, что правая часть не меньше $2\sqrt{2} \cdot (x_1 - x_{n+1})$. Если среди чисел x_i есть сколь угодно маленькие, то выберем n так, что $(2\sqrt{2} - 2.8)x_1 > 2\sqrt{2}x_{n+1}$. В противном случае заметим, что $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{xy}} > x$, так что все слагаемые ограничены снизу и достаточно взять их побольше.

8. Обозначим $2007 = n$. Нам достаточно того, что n нечетно. Действуем по индукции. Для $n = 1$ любая перестановка имеет неподвижную точку. Переход от $n-2$ к n. Рассмотрим такое k, что $a_k = n$. Если $k = n$, то неподвижная точка найдена, в противном случае $n - 1 \geqslant a_{k+1} \geqslant n^2/(k+3) \geqslant n^2/(n+2) > n-2$, так что $a_{k+1} = n-1$ и $k = n-1$, иначе $a_{k+1} \geqslant n^2/(n+1) > n-1$, что невозможно. Получается, что числа от a_1 до a_{n-2} образуют перестановку от 1 до $n-2$, применяем предположение индукции.

9. От противного. Пусть $n > m$ и $f(n) = f(m)$. Тогда

$$n^{2008} - m^{2008} = n! - m!$$

Если у m есть простой делитель $p > 2$, то $n! - m!$ кратно p, поэтому $n^{2008} - m^{2008}$ кратно p, а значит оно кратно p^{2008}. Поэтому $n! - m!$ кратно p хотя бы в 2008 степени. А значит, учитывая то что n кратно p, получаем, что

$m!$ кратно p хотя бы в 2008 степени. Но степень вхождения p в $m!$ это $[\frac{m}{p}]+[\frac{m}{p^2}]+\dots<\frac{m}{p}+\frac{m}{p^2}+\dots=\frac{m}{p-1}$. Тогда $m\geqslant 2\cdot 2008=4016$. А значит $n>4016$. Но при $n>4016$, имеем $n!-m!\geqslant n!-(n-1)!=(n-1)\cdot(n-1)!$. Но $(n-1)^2>n$ и $\forall k\in 2,3\dots 2008$ $k(n-k)>n$. Поэтому $n!-m!>n^{2008}$. Противоречие.

Осталось рассмотреть случай $m=2^a$, причем $m<4016$. Аналогично оценивая степень вхождения двойки в обе части получаем $m>2008$. Значит $m=2048$. Но тогда в правую часть 2 входит в 2047 степени, а в левую либо в кратную 2008, либо хотя бы в $11\cdot 2008$ степени. Противоречие.

10. Пусть $-\alpha_i$ — корни нашего многочлена f, тогда $f(x)=a_n(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdot\dots\cdot(x+\alpha_n)$. Очевидно, $\alpha_i\geqslant 0$ (положительных корней многочлен f не может иметь). Если все $\alpha_i>0$, то и все $a_i>0$ (раскроем скобки) — противоречие. Так что не умаляя общности $\alpha_n=0$. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i=a_{n-1}/a_n$, $\sum\limits_{i=1}^{n-1}1/\alpha_i=a_2/a_1$, так что

$$(n-1)^2\leqslant\left(\sum\alpha_i\right)\left(\sum 1/\alpha_i\right)=(a_2a_{n-1})/(a_1a_n).$$

Если $n\geqslant 4$, то $a_2a_{n-1}\leqslant n(n-1)$, $a_1a_n\geqslant 2$, так что получаем $(n-1)^2\leqslant n(n-1)/2$, что не так. При $n=2$ годятся многочлены $2x^2+x$ и x^2+2x, при $n=3$ — многочлен x^3+3x^2+2x и $2x^3+3x^2+1$. Это и есть **ответ**.

Второй тур. Лига тактик. Решения.

1. Добавим к сумме квадратов наших чисел сумму квадратов оставшихся чисел, тогда получится $\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$. С другой стороны числа разбиваются на пары k и $2n+1-k$, где k — выбранное число. Заметим, что $k^2+(2n+1-k)^2=2k^2-2(2n+1)k+(2n+1)^2$. Суммируя такие равенства n раз, мы получим, что удвоенная интересующая нас сумма равна

$$\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-n(2n+1)^2+n(2n+1)^2.$$

Таким образом, ответ: $\frac{n(2n+1)(4n+1)}{6}$.

2. На продолжении AB за точку A выберем точку X так, что $BA=AX$. Тогда по условию $CP=PX$. Обозначим $\angle AXC=\alpha$. Тогда $\angle BPC=2\alpha$. AM — средняя линия треугольника BXC, следовательно, $\angle BAM=\alpha$. Опустим из точки P перпендикуляр PY на CQ, он параллелен AM, следовательно, является биссектрисой угла APC, а, следовательно, делит CQ пополам. Тогда отрезок MY параллелен отрезку QB и равен его половине, а четырехугольник $APYM$ параллелограмм, так как его стороны попарно параллельны. Это заканчивает решение.

3. Рассмотрим две соседние строчки. В них либо числа на четных местах совпадают, а на нечетных различны, либо наоборот. Поэтому у каждой строчки все числа на четных местах либо совпадают с числами первой строчки, либо противоположны. Аналогично, на нечетных. Таким образом существует всего 4 различных вида строчек, поэтому какие-то две повторятся.

4. Заметим, что $1-ab=bc+ac=c(a+b)$. Применяя это наблюдение, при переносе в левую часть и сокращении, мы получаем, что нужно доказать, что $a+b+c\geqslant\sqrt{3}$, что очевидно, так как $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ac)=3$.

5. В этом графе $1004\cdot 200+1$ ребер, следоавтельно, одно цвета хотя бы 1005 ребер, следовательно, у них 2010 концов, то есть графе должно быть хотя бы 2010 вершин, но их 2009.

6. см. задачу из лиги стратегий

7. Ответ: $a=0$ или $a=1$, b — любое число.

Сразу заметим, что при $a=0$ условие заведомо выполняется, а при $b=0$ получаем, что $a-1$ делится на a^2+1, что возможно только при $a=1$. Будем теперь считать, что числа a и b натуральные. Прибавим к $b^2+ab+a+b-1$ число a^2+ab+1 и разложим на множители. Окажется, что $(a+b+1)(a+b)$ делится на $a(a+b)+1$. Последнее число взаимно просто с $a+b$, следовательно, $a+b+1$ делится на $a(a+b)+1$. Но $a+b+1<a(a+b)+1$ при $a\geqslant 2$, поэтому такое возможно лишь при $a=1$ — этот вариант подходит.

8. Рассмотрим x^3+2y^2 по модулю 8. Заметим, что кубы дают нечетные остатки и 0, а удвоенные квадраты — только 0 и 2. Значит числа вида x^3+2y^2 не дают остатков 4 и 6, а значит последовательных числе не более 5. Беря $x=-1,0,1,0,1$ и $y=0,0,0,1,1$ соответственно, получим числа $-1,0,1,2,3$

9. Пусть AA_1 высота тетраэдра, PP_A — перпендикуляр к грани BCD, и точка P'_A на высоте AA_1 такова, что $P'_AA_1=PP_A$. Ясно, что $AP'_A<AP$. Тогда $3V-3V_{PBCD}=S_A\cdot AP'_A<S_A\cdot AP$. Сложив все эти неравенства, получим требуемое.

10. Заметим, что $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$, поэтому, если $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$, то одно из чисел противоположно другому, откуда второе равенство очевидно следует. В обратную сторону аналогично.